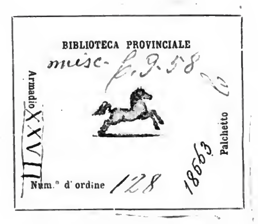
LAMARLE

NOTIONS

SUR LA GEOMETRIE

N. 44


FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
misc- f. 9. 58
Armadio XXVIII
Palchetto
18663
Num.° d' ordine 128

NOTIONS FONDAMENTALES

SUR

PLUSIEURS POINTS ÉLÉMENTAIRES

DE GÉOMÉTRIE, DE DYNAMIQUE

ET

D'ANALYSE TRANSCENDANTE;

PAR

M. ERNEST LAMARLE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND,
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE ET DE PLUSIEURS AUTRES
SOCIÉTÉS SAVANTES.





DÉPÔTS :

BRUXELLES,
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE D'AUGUSTE DECQ.
Rue de la Madeleine, 9.

PARIS,
LIBRAIRIE DES PONTS ET CHAUSSÉES DE Vve DALMONT.
Quai des Augustins, 49.

Bruxelles, imprimerie de M. HAYEZ.

1857.



Extrait du tome XXX des *Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE.

RÉFLEXIONS PRÉLIMINAIRES.

On remarque aujourd'hui, chez un grand nombre d'hommes, une sorte d'activité fébrile toute dirigée vers les améliorations matérielles. Emportés par une ardeur immodérée, on les voit pressés de jouir, impatients d'atteindre le but proposé, faciles sur le choix des moyens, pourvu qu'ils soient rapides, voulant avant tout la fin, et s'inquiétant peu des dangers qui se multiplient, en raison même de la vitesse, sur une route déjà semée d'écueils. Partout on aperçoit des traces de cet entraînement, même en mathématiques, non pas seulement dans l'enseignement supérieur, mais aussi dans l'enseignement élémentaire. On avait cru, jusqu'à ces derniers temps, que la géométrie, cette science pour ainsi dire parfaite, devait être respectée religieusement, et que, pour la garder pure, il fallait lui conserver toute son évidence, toute sa certitude. Là même où l'étude des mathématiques ne devait pas être poursuivie, pour des applications ultérieures, on la jugeait utile au développement de l'intelligence, et surtout à la formation du jugement, qui s'habituait, par elle, à la rigueur des déductions logiques. Aujourd'hui des efforts sont tentés dans un sens bien différent. Les notions dont on n'entrevoit point l'utilité pratique ou matérielle sont mises en quelque sorte à l'index. Il en est de même des méthodes exactes, lorsqu'elles ralentissent la marche, et qu'on y peut suppléer par certains procédés peu rationnels, mais expéditifs. Quelques mots suffiront pour préciser le sens qui s'attache aux observations précédentes et les justifier.

Dans les examens pour l'admission à l'École polytechnique, il est inter-

dit de faire aucune question sur les systèmes de numération dont la base n'est point égale à 10. En revanche, on exige des candidats la connaissance et l'usage de la règle à calcul.

Est-ce là du progrès? n'y a-t-il pas lieu, au contraire, de s'inquiéter sérieusement d'une pareille direction donnée à l'enseignement mathématique?

Lorsqu'on s'astreint à voir dans la circonférence de cercle ce qu'elle est réellement, à savoir une courbe essentiellement continue, il faut une transition pour étendre au cercle certaines propriétés des polygones inscrits. On va plus vite en regardant les figures curvilignes comme *égales* à des polygones d'un *nombre infini* de côtés [1]. L'expédient est simple; l'idée vint d'y recourir. Mais bientôt des scrupules s'élevèrent. On reconnut qu'un pareil expédient n'était point à sa place dans les éléments de la géométrie, et que d'ailleurs il y servirait peu. On l'en exclut [2], sauf à le réserver pour les mathématiques spéciales, où, paraît-il, le besoin s'en faisait sentir dans l'enseignement de la mécanique élémentaire [3].

En procédant ainsi, qu'a-t-on voulu? faciliter et surtout abréger l'étude des mathématiques. On convenait qu'*il ne fallait point altérer dans les masses ce bon sens droit et sûr qui vit des choses communes, cette raison sage et modérée qui répugne aux chimères* [4]. L'emploi de l'infini présentait, sous ce rapport, des inconvénients graves et même des dangers. On se préoccupa surtout des avantages qu'il pouvait offrir, au point de vue de l'accélération, et l'on tenta de le faire intervenir dans l'enseignement élémentaire. Les promoteurs de cette innovation procédaient avec une certaine réserve; il sem-

[1] Voir le rapport, publié en 1850, sur l'enseignement de l'École polytechnique. On y lit l'énoncé suivant : « Une *figure curviligne* doit être considérée comme *égale* à un *polygone* d'un » nombre *infini* de côtés. »

[2] Voir le programme de l'enseignement des lycées, publié en 1852. Au lieu de l'énoncé qui précède, on y lit : « La *longueur* de la circonférence de cercle sera considérée, sans démonstration, » comme la *limite* vers laquelle *tend* le *périmètre* d'un polygone inscrit dans cette courbe, à » mesure que ses côtés diminuent. »

[3] Voir le programme de la classe de mathématiques spéciales, publié en 1853. Le *travail élémentaire* des forces y figure comme une des parties de la mécanique qui doit être enseignée dans les lycées.

[4] Voir le Rapport de la faculté des sciences de Paris, en date du 6 avril 1847.

ble même qu'ils hésitaient. Aujourd'hui ils ont fait école, et leurs partisans, plus hardis, ne reculent devant aucune témérité. C'est ainsi qu'un ancien élève de l'École polytechnique, le père Gratry[1], demande avec instance que la méthode infinitésimale soit appliquée partout en mathématiques, au début comme ailleurs. De là, s'il faut l'en croire, *une simplification fondamentale, qui doit vivifier et accélérer dans une incalculable proportion l'enseignement mathématique.* Peu importe au père Gratry que les infiniment petits soient inintelligibles (il en convient)[2], et qu'on objecte contre leur emploi le défaut de rigueur ou même d'exactitude : il adopte et recommande la méthode infinitésimale, *parce qu'elle mène au but, parce qu'elle est aux anciennes méthodes ce que notre nouveau moyen de locomotion est aux anciens.* Ce qu'il fallait ajouter, pour qu'on sût nettement à quoi s'en tenir, c'est qu'employée dans ces conditions, elle deviendrait pour tous un véritable casse-cou.

On voit, par les détails dans lesquels je viens d'entrer, qu'il existe une tendance manifeste à simplifier l'enseignement mathématique et à lui imprimer une marche plus rapide. Considérée en elle-même, cette tendance peut être légitime, et pourvu qu'on n'y sacrifie rien d'essentiel, elle mérite qu'on tente quelques efforts pour lui donner satisfaction. Tel est, en partie, l'objet du travail que je viens soumettre au lecteur. Si la tâche à remplir est au-dessus de mes forces, puissé-je au moins marquer la direction à suivre et préparer la voie où d'autres sauront réaliser toutes les améliorations désirables.

J'ai divisé ce travail en deux sections principales. La première traite exclusivement des définitions de la droite et de la courbe, en géométrie, de la vitesse, en mécanique. La seconde embrasse la question des infiniment petits, la définition de la différentielle, l'exposé simple et tout élémentaire de cette métaphysique dont d'Alembert disait, qu'elle est encore plus importante et peut-être plus difficile à développer que les règles mêmes de l'analyse transcendante.

Un résumé général complète ce travail et en fait ressortir l'unité. Il

[1] *Logique du père Gratry*, t. II, p. 369 et suivantes (1re édition).
[2] *Idem*, p. 123.

montre comment en mathématiques élémentaires, de même qu'en analyse transcendante, tout se ramène à une seule et même conception fondamentale; comment cette conception se distingue à la fois par une extrême simplicité dans les applications, une rigueur absolue, une puissance et une fécondité toujours au moins égales, et souvent supérieures à celles de la méthode infinitésimale.

Quelques mots encore concernant le point de vue purement philosophique.

Il semblerait que la philosophie mathématique doive être fondée tout entière sur le spiritualisme. En est-il ainsi? N'est-ce pas, au contraire, l'abaisser au niveau d'un sensualisme grossier, que de confondre, ainsi qu'on le fait en plus d'un lieu, les effets et les causes, les phénomènes et les lois qui les régissent, ce qui tombe sous les sens avec ce que la raison seule peut saisir. On s'étonnera, sans doute, de voir élever contre les sciences mathématiques une pareille accusation. Et cependant, je la crois parfaitement fondée. Qu'on en juge par un aperçu rapide de quelques points fondamentaux.

En mécanique élémentaire, on débute par le mouvement uniforme, et l'on définit la vitesse, *l'espace décrit pendant l'unité de temps.* On dit, d'ailleurs, du point qui se meut, *qu'il est animé d'une certaine vitesse.* La vitesse, qui anime un point est, à coup sûr, essentiellement distincte de l'espace que ce point décrit pendant l'unité de temps. L'une est la cause, le principe du déplacement; l'autre en est l'effet. La vitesse d'un point est, en réalité, l'état de mouvement qui anime ce point, état purement interne, échappant à nos sens par sa propre nature, se révélant par le déplacement qu'il produit et y donnant sa mesure, lorsqu'il persiste sans altération, sans modification.

S'agit-il de la force? Si l'on suivait les mêmes errements, on devrait dire qu'elle est l'accélération produite pendant l'unité de temps. On évite ici la confusion que j'ai signalée tout à l'heure entre la cause et son effet. Pourquoi ne pas prendre le même soin en ce qui concerne la vitesse et l'espace décrit?

L'observation que je viens de faire s'applique également à cette défini-

tion de la droite, qu'elle est le chemin le plus court d'un point à un autre. Elle s'y applique, non pas directement, mais en ce sens que, dans les développements ultérieurs, on ne distingue pas entre la direction proprement dite et la droite qui fixe ou détermine la direction considérée. Dans le point qui se meut, et par cela seul qu'il se meut, il y a direction. La droite est le type sensible de la direction devenue permanente. Lorsqu'elle se conserve dans le déplacement d'un point, sans changer, sans se modifier, la direction est à la portion de droite décrite, ou, ce qui revient au même, au chemin le plus court réalisé par cette portion de droite, ce que la cause est à son effet direct, ce qu'un principe est à sa conséquence immédiate.

La confusion n'est pas moindre en ce qui concerne les principes fondamentaux de la méthode infinitésimale et leurs applications. Loin de là, je la crois encore plus complète.

Il est bien entendu que je laisse à l'écart ces rêveries mystiques, qui font des infiniment petits des zéros absolus, *exprimant l'infini en simplicité* [1].

[1] Selon le père Gratry, « L'infiniment petit n'est pas seulement plus petit que toute grandeur » donnée. Il est plus petit que toute grandeur possible, ou plutôt il n'est pas petit; il est nul en » grandeur. Il est absolument en dehors de la quantité. Il est un infiniment petit proprement dit. » (Voir le journal le *Correspondant*, n° du 25 octobre 1855, page 46.) A la page 115, de sa *Logique*, tome II, le père Gratry expose que l'infiniment petit mathématique est *l'infini en simplicité*, qu'il ne peut ni croître ni décroître. Il ajoute, à la page 124 : » L'élément infinitésimal n'est pas une » quantité très-petite, ce n'est en aucune façon une quantité. Comme quantité, l'élément infinité- » simal est absolument nul. » Il se demande ensuite ce qu'est l'élément infinitésimal, et il répond (page 125) : » C'est une idée; une idée, dis-je, et c'est assez. »

D'un autre côté, le père Gratry cite Hegel (*Logique*, tome II, page 144) : « Qu'est-ce que » l'élément infinitésimal? C'est, dit Hegel, la grandeur décroissant jusqu'à s'évanouir et prise au » moment même où elle s'évanouit; car avant, ce serait trop tôt, et après, ce serait trop tard. » C'est la grandeur prise au moment même où, cessant d'être quelque chose, elle n'est pas » encore rien du tout, c'est-à-dire au moment où elle parvient à la féconde identité de l'être et du » néant. »

Que dire à la lecture de pareils paradoxes, et ne faut-il pas regretter que des intelligences élevées, des esprits éclairés et consciencieux, se croient en droit d'invoquer l'appui des géomètres pour accepter et professer les théories les plus excentriques, les plus insoutenables?

Si des hommes, tels que Hegel et le père Gratry, ont ainsi pu s'égarer, combien d'autres ne l'ont-ils pas fait avant eux! Combien d'autres ne le feront-ils pas à leur suite! Et pourquoi ces aberrations, déjà si périlleuses en mathématiques, mais cent fois plus encore en philosophie? Pourquoi? Parce qu'à l'origine du calcul infinitésimal, les explications données ont été insuffisantes ou fautives : parce que, depuis longtemps, et aujourd'hui même encore, l'emploi de l'infini

Depuis longtemps, l'on a condamné sans retour les indivisibles de Cavalleri, et parmi les géomètres dont le nom peut avoir quelque autorité, il n'en est pas un seul qui voulût les défendre, encore moins les réhabiliter.

Il s'agit des infiniment petits que Leibnitz appelait des incomparables, et dont, après lui, plusieurs géomètres ont fait des ordres particuliers de grandeurs essentiellement distinctes les unes des autres, et toutes ensemble, de la grandeur finie.

Pour ces géomètres, l'infiniment petit est une quantité quelconque, réduite à un tel degré de petitesse qu'elle a cessé d'être finie. L'infiniment petit n'est pas nul; il n'a pas perdu la propriété de pouvoir augmenter et diminuer indéfiniment; néanmoins, s'il est en présence d'une quantité finie, il s'évanouit de lui-même.

On pourrait croire, au premier abord, qu'une pareille conception repose sur quelque exagération d'un spiritualisme raffiné. Ce serait, selon nous, lui faire trop d'honneur. La quantité, telle que la raison la conçoit, a son essence propre et indépendante de tout degré de grandeur. Qu'elle croisse ou qu'elle décroisse, peu importe : elle peut croître et décroître toujours; elle ne change de nature, ni en croissant ni en décroissant. La raison se refuse absolument à admettre l'existence d'une limite que la quantité ne pourrait franchir, sans se transformer, sans devenir infiniment petite de finie qu'elle était d'abord, ou réciproquement. Mais qu'au lieu de la seule raison, l'on invoque à la fois la raison et les sens, tout change alors. Pour les sens, la quantité qui décroît s'évanouit alors qu'elle leur échappe, et, par conséquent, la limite dont je viens de parler existe

dans l'enseignement mathématique reçoit une extension dangereuse, presque toujours abusive, quelquefois même absurde.

Puissent de tels exemples servir au moins d'avertissement! Au dire du père Gratry, la méthode infinitésimale devrait être appliquée partout, en mathématiques. « Ce serait la lumière introduite » dans la masse; la vitesse des nouveaux moyens de locomotion substituée à la lenteur des » anciens. » Qu'on en juge, au contraire, par le mal qu'elle produit, alors même qu'à l'imitation d'Ampère, mon professeur et celui du père Gratry, on la réduit à un rôle accessoire, et qu'on prend d'ailleurs, toutes les précautions possibles contre de fausses interprétations. Qu'on la juge par l'état de trouble et de confusion où elle peut jeter des esprits d'élite; qu'on la juge, en un mot, par le père Gratry lui-même, et loin de songer à l'introduire dans l'enseignement élémentaire, on comprendra qu'il y a peut-être urgence à l'exclure de l'enseignement supérieur.

nécessairement. Si les sens intervenaient seuls, la quantité évanouie pour eux ne se distinguerait pas du néant. La raison leur venant en aide supplée à leur insuffisance. Elle les avertit qu'il ne s'agit, en réalité, que d'un évanouissement relatif, d'une apparence trompeuse dépendant de leur imperfection. Prévenus par elle, ils s'arment en quelque sorte d'un pouvoir grossissant, qui fait réapparaître la quantité disparue et lui restitue en même temps toutes ses propriétés. De là les infiniment petits, qui s'évanouissent devant la quantité finie et qui, à leur tour, font évanouir devant eux d'autres infiniment petits d'un ordre supérieur.

Je ne prétends pas dire que les partisans de la méthode infinitésimale, que les croyants à l'existence réelle des infiniment petits exposent, comme je viens de le faire, leur profession de foi. J'admets qu'ils ne se rendent pas compte des motifs de leur croyance, et qu'eux-mêmes la répudieraient, s'ils la voyaient établie sur un mélange aussi grossier de spiritualisme et de sensualisme. Toutefois, c'est en vain que j'y cherche un autre fondement.

Je viens de parler des principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale. Voyons maintenant comment on procède dans les applications. Voici d'abord ce qui est.

Tout se réduit à saisir, dans la variation continue et simultanée de deux grandeurs, la loi qui régit les changements de l'une par rapport aux changements de l'autre. Cette loi se traduit par une équation où figurent à la fois l'accroissement de la variable et celui de la fonction. De là résulte un lien de dépendance mutuelle et réciproque, subsistant à l'origine même des accroissements et présidant au début de leur génération simultanée et connexe. L'existence de ce lien est en quelque sorte évidente. Toutefois, l'on ne sait pas d'avance quelle en est la nature, ni en quoi il consiste précisément. Comment le reconnaître? Comment le caractériser, si ce n'est en considérant les effets qu'il produit? Or, pour qu'il se manifeste par ces effets, pour qu'il apparaisse en eux, dégagé de tout voile, il faut qu'il intervienne constamment, partout et toujours, dans des conditions absolument identiques. Tel est le cas des fonctions linéaires. La conséquence est qu'alors il y a proportionnalité constante entre l'accroissement de la

fonction et celui de la variable. Par là s'accuse et se révèle le lien de dépendance qui subsiste à l'origine de ces accroissements. Faut-il dire maintenant quel est ce lien et en préciser la nature? Il n'en est pas besoin. Ne voit-on pas, en effet, qu'il est complétement déterminé par cela seul que, *dans le cas d'une invariabilité absolue*, il établit et maintient entre les accroissements une raison de proportionnalité constante? Telle est sa détermination générale, absolue. Quant aux déterminations particulières qu'il comporte, elles sont en nombre infini, et chacune d'elles a pour type sensible, dans chaque fonction linéaire, la valeur numérique du rapport existant entre les accroissements.

Passons des fonctions linéaires à une fonction quelconque continue et non linéaire. Dans ce cas, l'accroissement de la fonction n'est plus proportionnel à celui de la variable. Néanmoins, le même lien de dépendance mutuelle et réciproque existe à l'origine commune de ces accroissements. Ce qui change, c'est qu'au lieu de persister dans un type unique, toujours invariable, ce lien passe incessamment d'un type à un autre, chacune de ses déterminations particulières dépendant de l'origine choisie pour les accroissements et variant continûment avec cette origine.

De là vient que le rapport des accroissements est incessamment variable; de là vient aussi que la limite de ce rapport exprime le type particulier que le lien de dépendance, existant entre les accroissements et à leur origine commune, affecte à cette même origine.

Considérons ce type dans une quelconque de ses déterminations particulières, et, pour le caractériser *par les effets qui lui sont propres*, imaginons qu'il *persiste* dans cette détermination *devenue permanente. A cette hypothèse*, évidemment licite, correspondent des accroissements particuliers, *essentiellement distincts* des accroissements effectifs. Ce sont ces accroissements particuliers qui constituent les accroissements différentiels proprement dits. Ils se distinguent des accroissements effectifs en ce que leur rapport est constant, comme dans le cas des fonctions linéaires. Quant à ce rapport lui-même, il a pour valeur numérique celle de la limite désignée ci-dessus.

La méthode infinitésimale confond les accroissements effectifs, *supposés très-petits*, avec les accroissements différentiels.

Faute de distinguer les effets sensibles et leur cause, elle ne voit que les accroissements effectifs : elle ne remonte pas jusqu'au lien qui subsiste à l'origine de ces accroissements et les fait dépendre l'un de l'autre. Au lieu du type *essentiellement transitoire* et *continûment variable*, affecté par ce lien, elle suppose une *succession discontinue* de types, tous *constants* pour un *intervalle très-petit*, et *brusquement variables* d'un intervalle à l'autre. Ce qu'elle saisit d'ailleurs, ce n'est point ce type lui-même, considéré dans son essence, c'est uniquement ce qui devient sensible, à savoir, les effets propres à ce type, lorsqu'il persiste dans une seule et même détermination. Encore faut-il ajouter que tout en opérant sur ces effets, elle les fausse par l'interprétation qu'elle leur donne.

Je crois avoir montré suffisamment en quoi la philosophie mathématique me paraît entachée de sensualisme sur plusieurs points fondamentaux. L'objet que je me propose, en publiant ce travail, n'est pas seulement de simplifier et d'améliorer l'enseignement mathématique, en plaçant au début les seuls et véritables principes de l'analyse transcendante, il est aussi d'y rétablir l'unité, en ôtant tout prétexte à l'emploi des notions infinitésimales, et en faisant dominer partout les droits méconnus du spiritualisme.

NOTIONS FONDAMENTALES

SUR

PLUSIEURS POINTS ÉLÉMENTAIRES

DE GÉOMÉTRIE, DE DYNAMIQUE

ET

D'ANALYSE TRANSCENDANTE.



PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE.

CHAPITRE Ier.

DE LA LIGNE DROITE ET DE LA LIGNE COURBE, CONSIDÉRÉES DANS LEURS DÉFINITIONS ET DANS LEUR NATURE INTIME.

1. L'instruction générale, publiée [1] par M. Fortoul, sur l'exécution du plan d'études des lycées, fournit les indications suivantes concernant les définitions de la ligne droite et de la ligne courbe.

« Cette définition de la ligne droite qu'*elle tend* toujours vers un seul et » même point, donnée par Bezout, et celle de la ligne courbe qu'elle est » la trace d'un point qui, dans son mouvement, se détourne *infiniment*

[1] Voir *Instruction générale sur l'exécution du plan d'études des lycées;* par M. H. Fortoul, ministre de l'instruction publique et des cultes. Paris, 15 novembre 1854.

» *peu, à chaque pas,* sont des plus fécondes en conséquences. Quand on » définit la ligne courbe *une ligne qui n'est ni droite, ni composée de lignes* » *droites,* on énonce deux négations qui ne peuvent mener à rien et qui » n'ont aucun rapport avec la nature intime de la ligne courbe. La défini- » tion donnée par Bezout, entre, au contraire, dans la nature de l'objet » à définir; elle saisit sa manière d'être, son caractère et met immédiate- » ment en la possession du lecteur l'idée générale dont on tire plus » tard les propriétés des lignes courbes et la construction de leurs tan- » gentes. »

Si l'on se bornait à la lecture du passage que je viens de reproduire, on pourrait croire que l'instruction de M. Fortoul a pour objet de recommander l'emploi des quantités infinitésimales en géométrie élémentaire. Ce serait, pensons-nous, une très-grave erreur. Comment supposer, en effet, qu'il s'agisse d'introduire dans les éléments la notion de ces grandeurs chimériques et inintelligibles désignées sous le nom d'*infiniment petits!* Comment le supposer, alors qu'on trouve, dans la même instruction, ces réflexions si sages et sur le sens desquelles il est impossible de se méprendre?

« L'étude de la géométrie constitue le véritable cours de logique scien- » tifique : il est d'autant plus nécessaire d'imprimer à son enseignement » la direction la plus propre à fortifier l'esprit, à le redresser au besoin, » à y faire pénétrer la lumière de l'évidence.

» Le professeur ne doit pas se servir d'un mot sans s'assurer que ses » élèves en comprennent bien le sens. Il ne doit s'appuyer sur une idée » qu'autant qu'elle est bien comprise. C'est surtout à ces préliminaires » de la science qu'il convient d'appliquer la règle : Apprendre peu, mais » bien.

» C'est à cette époque qu'il importe d'accoutumer les jeunes gens à ne » pas se contenter de mots, et à bien se rendre compte s'ils en ont l'in- » telligence réelle : car, une fois prise, l'habitude de se payer de mots les » rendrait impropres à toute étude scientifique sérieuse.

» En mécanique, on insistera principalement sur le temps nécessaire » au développement de l'action des forces, quelque rapide que cette

» action puisse paraître, afin d'écarter toute hypothèse d'effets instan-
» tanés propres à fausser les idées. »

Certes, ce n'est point en parlant d'infiniment petits que le professeur *ferait pénétrer dans l'esprit des jeunes gens la lumière de l'évidence.* « Nous n'en-
» tendons point ce qu'est un infiniment petit, lui dirait-on de toute part,
» et il serait obligé d'avouer qu'il ne l'entend pas davantage [1]. » Si donc, il passait outre, ou bien il ne serait pas compris par ses élèves, ou bien il *les habituerait à se servir de termes dont ils n'auraient pas l'intelligence, à se payer de mots.* « Il ne faut pas qu'il y ait de mystères, ni en arithmétique, ni
» en géométrie [2]. » Il le faut d'autant moins, qu'ils impliqueraient contradiction dans une étude *qui doit constituer le véritable cours de logique scientifique.* Le professeur ne dira donc point que les incommensurables ont une commune mesure infiniment petite, ni, comme on le proposait dans un rapport, publié en 1850, sur l'enseignement de l'École polytechnique, qu'une figure curviligne est égale à un polygone d'un nombre infini de côtés. Le programme annexé au plan d'études des lycées condamne absolument ces définitions impossibles; non pas que l'auteur soit ennemi de la simplicité; loin de là, il veut qu'une proposition démontrée pour le cas d'une commune mesure indéfiniment petite, soit par cela même considérée comme générale. Il prescrit, relativement à la longueur de la circonférence de cercle, de la considérer, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, à mesure que ses côtés diminuent indéfiniment. Ce qui importe avant tout, c'est l'exactitude. De là vient que la méthode des limites est imposée comme obligatoire. Si, d'ailleurs, on exige *qu'elle soit appliquée avec tous ses avantages de simplicité,* c'est qu'elle ne cesse point pour cela *de comporter toute la rigueur possible.*

La courbe polygone n'est pas seulement exclue de la géométrie, l'instruction ministérielle veut qu'elle le soit également de la mécanique; cela résulte de la considération suivante :

Si le cercle était, en réalité, un polygone, il deviendrait inexplicable

[1] Voltaire, *Dictionnaire philosophique*, art. GÉOMÉTRIE.

[2] *Idem.*

que, sous l'action d'une force centripète, un mobile pût décrire une circonférence. En effet, ou bien la force agit pendant le parcours des côtés et normalement à leur direction, ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, elle ne produit alors aucune déviation du mobile et qu'en conséquence, elle demeure sans effet; ou bien il faut supposer qu'elle s'exerce par intervalle et seulement aux moments précis où le mobile atteint l'un quelconque des sommets du polygone; or, c'est là précisément ce qui est interdit, puisque *il faut écarter toute hypothèse d'effets instantanés propres à fausser les idées.*

2. On voit dans quel esprit est conçue l'instruction publiée par M. Fortoul, sur le plan d'études des lycées. Prise dans son ensemble, cette instruction ne laisse aucun prétexte à l'introduction des quantités infinitésimales dans l'enseignement mathématique. Si donc les définitions, empruntées à Bezout, pour la ligne droite et pour la ligne courbe, sont reproduites en des termes qui semblent impliquer la notion des infiniment petits, ce n'est point à ces termes qu'il faut s'arrêter, mais à l'esprit, au sens intime de ces définitions, en ayant soin, du reste, d'éviter toute inexactitude, toute équivoque et, autant que possible, toute obscurité.

« Définir la ligne courbe une ligne qui n'est ni droite ni composée » de lignes droites, c'est énoncer deux négations qui ne peuvent mener » à rien et qui n'ont aucun rapport avec la nature intime de la ligne » courbe. » Rien de plus vrai que cette remarque. Mais s'ensuit-il qu'il faille adopter littéralement cette autre définition : *La ligne courbe est la trace d'un point qui, dans son mouvement, se détourne infiniment peu à chaque pas?* Non, sans aucun doute.

Qu'est-ce que *le pas d'un point?* Qu'entend-on par ces mots : *se détourner infiniment peu?* Telles seraient les questions que tout élève, désireux de comprendre, ferait au professeur. Comment celui-ci pourrait-il y répondre? La chose est tout simplement impossible.

3. On définit la ligne droite le plus court chemin d'un point à un autre. On ne peut dire de cette définition qu'elle ne mène à rien. Faut-il, d'ailleurs, lui préférer celle de Bezout : *La droite est la ligne qui tend toujours vers un seul et même point?* La question me paraît douteuse; cherchons à l'éclaircir.

Si par *tendre* on entend le simple effet *d'aller vers, sans détour, directement*, il est visible que la définition de Bezout revient à dire : *La droite est la ligne qui va d'un point à un autre par le plus court chemin.* Sauf la forme, il y aurait donc identité entre cette définition et celle qu'on adopte vulgairement, non pas seulement en géométrie, mais aussi dans le langage usuel et familier. En ce cas, pourquoi ne pas s'en tenir à l'acception ordinaire? Cela ne vaudrait-il pas mieux?

Supposons, au contraire, qu'en disant de la droite qu'elle tend toujours vers un seul et même point, on veuille exprimer ce qu'est la direction, en dehors de tout espace décrit, c'est-à-dire une tendance actuelle, considérée à la fois dans son instantanéité et dans sa permanence. En ce cas, l'on devra se représenter un point mobile tendant à se rapprocher le plus possible d'un point fixe, et affectant par là même un état particulier. Cet état particulier prendra le nom de *direction*, et si par lui-même il n'est pas sensible, il le deviendra dès que le point mobile, supposé libre de se mouvoir, ira vers le point fixe et décrira la ligne qui l'en rapproche davantage, eu égard au chemin parcouru. Cette ligne, c'est la droite : elle est évidemment, et par sa définition même, le plus court chemin d'un point à un autre.

En admettant que la définition de Bezout doive être développée dans le sens qui précède, il n'est pas douteux pour moi qu'à l'avantage d'une exactitude rigoureuse, elle joindrait celui d'une grande fécondité. Mais serait-elle suffisamment dégagée de toute obscurité? Je crains que non. Essayons, toutefois, de résumer en quelques lignes les notions fondamentales qui peuvent se rattacher à la définition de la droite.

Dans tout point qui se meut, il y a *tendance actuelle* à aller *directement* vers quelque autre point. Cette tendance constitue à chaque instant ce qu'on nomme *la direction* du point en mouvement. Lorsque la tendance persiste vers un seul et même point supposé fixe, la direction demeure invariable, et, *rendue sensible par le fait même de sa permanence*, elle se manifeste dans la ligne décrite. Cette ligne, c'est la droite : elle est, par essence, le plus court chemin d'un point à un autre.

4. Revenons à la ligne courbe, et cherchons comment, à l'aide de ces

développements, ou sans eux, l'on peut la définir, tout en conservant la stricte exactitude en dehors de laquelle il n'y a point, à proprement parler, de science mathématique, et, néanmoins, en remplissant, autant que possible les conditions voulues par l'instruction précitée.

Admettons d'abord ce que j'ai dit tout à l'heure d'un point en mouvement et de la direction qu'il affecte à chaque instant, par suite de sa tendance à se diriger constamment vers quelque autre point. Désignons le premier de ces points sous le nom de *point dirigé*, le second, sous celui de point *directeur ou pôle.* Si le point directeur est lui-même en état de mouvement, et qu'il se déplace sur une ligne quelconque, autre que la droite menée par les deux points, il est visible que la direction du point dirigé devient incessamment variable, et que sa trace, ne pouvant être droite sur aucune étendue, est essentiellement courbe.

Dans cet ordre d'idées, voici quelles peuvent être les définitions de la ligne droite et de la ligne courbe :

La ligne droite est la trace d'un point qui tend et se meut vers un point fixe;
La ligne courbe est la trace d'un point qui tend et se meut vers un point mobile [1],

ou bien,

La droite est la trace d'un point qui se meut sans changer de direction;
La courbe est la trace d'un point qui se meut en changeant incessamment de direction,

ou bien encore :

La droite est une ligne de direction constante.
La courbe est une ligne de direction incessamment variable.

Ces trois systèmes de définitions rentrent évidemment l'un dans l'auttre. Ils ne font, d'ailleurs, que reproduire, sous une forme plus correcte et,

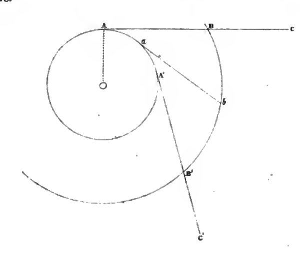
[1] Il est bien entendu qu'en adoptant cette définition, l'on devrait observer que le point directeur est censé se mouvoir sur une ligne quelconque, autre que la droite menée de ce point au point dirigé. Si le point directeur se mouvait sur cette droite ou sur son prolongement, tout se passerait, comme s'il était fixe, et la ligne décrite par le point dirigé serait droite. Sauf ce cas, elle est forcément courbe.

me semble-t-il, avec plus d'harmonie relative, le sens intime des définitions de Bezout.

5. Admettons maintenant que l'idée de direction, déduite de la tendance d'un point à aller vers un autre et considérée en elle-même, abstraction faite de tout chemin parcouru, n'offre pas toute la clarté désirable; admettons, si l'on veut, qu'elle ne se lie pas forcément à l'idée de la courbe, et, qu'en conséquence, on puisse la réserver pour la dynamique, où elle se présente naturellement et devient absolument nécessaire : peut-être alors craindra-t-on de l'introduire au début de la géométrie élémentaire? En ce cas, l'on peut s'en tenir, pour la droite, à la définition vulgaire et adopter pour la courbe cette autre définition :

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite, tandis que la droite tourne autour de ce point.

Veut-on rendre sensible et, en quelque sorte, matériellement palpable, ce double mouvement d'un point et d'une droite qui se meuvent simultanément, le point sur la droite, la droite autour du point? Rien de plus simple. Il suffit, pour cela, des premières notions concernant la droite et le cercle.



Soit, en effet, O le centre d'une circonférence au rayon OA, et AC, une perpendiculaire élevée sur ce rayon, à son extrémité.

On démontre aisément :

1° Que la perpendiculaire AC, désignée sous le nom de *tangente*, n'a qu'un point de commun avec la circonférence; savoir, le point de contact A;

2° Qu'entre la tangente et la courbe, on ne peut mener, à partir du point A, aucune droite, aucune portion de droite.

Imaginons qu'un fil sans épaisseur, parfaitement flexible et d'une longueur indéfinie, soit enroulé sur la circonférence OA, et s'en échappe en A suivant la tangente AC. Soit d'ailleurs BB' un arc de cercle concentrique à la circonférence OA. Si l'on saisit en B le point correspondant du fil AC et qu'on lui fasse décrire l'arc BB', en laissant glisser la partie BC, et maintenant tendue la partie BA, le fil continuera à s'enrouler sur la circonférence OA, et il passera ainsi de la position AB à la position A'B'. Dans ce déplacement, la partie du fil qui n'est point encore enroulée reste tangente à la circonférence OA, et, comme elle ne cesse point d'être droite dans l'intervalle des arcs AA', BB', on voit qu'à chaque instant son mouvement se réduit à une rotation dont le centre est le point où l'enroulement finit. Il y a donc à la fois et simultanément :

1° Suivant l'arc AA', transport progressif du point où le fil vient toucher la circonférence OA;

2° Autour de ce même point, rotation continue de la droite suivant laquelle le fil est tendu.

Cela posé, considérons l'instant précis où le point B commence à parcourir l'arc BB', et, pour plus de simplicité, supposons que le parcours de cet arc s'effectue d'un mouvement uniforme. Concevons qu'au même instant un point mobile, placé en A, se meuve sur le fil AB, de A vers B, uniformément, et de manière à décrire l'arc AA' dans le temps nécessaire au point B pour le parcours de l'arc BB'. La conséquence est évidente. Elle consiste en ce que, dans le passage de la position AB à la position A'B', le point A, supposé mobile sur le fil AB, avance d'une quantité précisément égale à celle dont le fil s'enroule sur la circonférence OA. Or, il

en est forcément de même pour toute position intermédiaire *ab*, puisque les points A et B se meuvent tous deux avec uniformité, et que, d'ailleurs, les arcs quelconques A*a*, B*b* sont toujours les mêmes parties aliquotes de leurs circonférences respectives. La rotation du fil a ainsi pour effet constant de ramener le point A en *a* et de lui faire décrire l'arc AA' en même temps qu'il se meut de *a* vers *b* sur la tangente *ab*. On voit par là comment une circonférence de cercle peut être définie : *La trace d'un point qui se meut sur une droite, tandis que la droite tourne autour de ce point.* Dans ce cas particulier, le mouvement du point sur la droite et celui de la droite autour du point sont tous deux uniformes. La réciproque est également vraie, c'est-à-dire que l'uniformité de ces deux mouvements implique, comme résultat, la génération d'une circonférence de cercle. Pour toute autre courbe, le mouvement du point sur la droite peut encore être uniforme, mais alors le mouvement de la droite autour du point est nécessairement varié.

L'image d'un fil qu'on maintient tendu et qu'on enroule sur une circonférence de cercle fait très-bien voir comment une droite peut tourner autour d'un point qui se déplace incessamment suivant la direction affectée par cette même droite. Elle rend sensible le mouvement d'une tangente qui tourne, sans glisser, sur la circonférence et s'y enveloppe par l'application successive de toutes ses parties; elle montre avec clarté comment un point supposé mobile sur la tangente peut rester sur la circonférence, et, par conséquent, la décrire en vertu de ces deux mouvements simultanés, le glissement du point sur la tangente, la rotation de la tangente autour du point; elle offre enfin l'avantage de manifester, dans un cas très-simple, la nature intime de la courbe, et de fournir ainsi les ressources les plus précieuses pour les applications ultérieures.

6. La courbe étant la trace d'un point qui se meut sur une droite, tandis que la droite tourne autour de ce point, l'on peut supposer en général que le mouvement du point sur la droite s'accomplit uniformément. Dès lors il n'y a que deux cas possibles, selon que la rotation de la droite autour du point est elle-même uniforme, ou qu'au contraire, elle a lieu d'un mouvement varié. Dans le premier cas, la trace du point

est une circonférence de cercle; dans le second, elle peut être une courbe quelconque autre qu'une circonférence. Nous reviendrons sur ces considérations importantes et nous chercherons à donner un aperçu de leur fécondité.

Au point de vue où nous sommes placés actuellement, nous avons pour la droite et pour la courbe les définitions suivantes :

La droite est le plus court chemin d'un point à un autre;

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite, tandis que la droite tourne autour de ce point.

Ces définitions ne diffèrent de celles de Bezout que par la forme. Toutefois, nous les croyons infiniment préférables, attendu qu'elles n'ont rien de mystérieux, rien d'équivoque, rien qui prête à l'erreur ou aux malentendus. On peut les admettre en géométrie élémentaire, sans crainte de soulever, de la part des élèves, des objections insolubles, sans nécessité d'un appel à la foi contre la révolte de leur raison, sans risque de les rendre impropres à toute étude scientifique sérieuse, en les habituant à se payer de mots. Loin d'être stériles, comme la définition vulgaire de la courbe, elles ont une grande fécondité et comportent toute l'extension nécessaire pour les développements de la géométrie transcendante. Quoi qu'il en soit, nous n'osons guère espérer de les voir admettre sans contestation. Il ne suffit pas, pour certains géomètres, qu'une définition soit à l'abri de toute objection sérieuse; ils veulent, en outre, qu'elle remplisse certaines conditions accessoires, considérées par eux comme indispensables, tandis qu'aux yeux des autres, elles sont purement conventionnelles et, par conséquent, insignifiantes. La notion du mouvement, introduite par Bezout dans la définition de la courbe, ne fait point ombrage à ceux-ci : elle effarouche ceux-là. Pour les uns, il importe peu qu'une ligne soit considérée en géométrie comme la trace d'un point qui se meut. Pour les autres, l'idée de mouvement est étrangère à la géométrie proprement dite, et, s'il pouvait être permis de l'y introduire, au moins faudrait-il éviter de créer artificiellement une subordination contraire à la nature des choses et repoussée par elle. A ce point de vue, notre définition pèche comme

celle de Bezout. En vain réunirait-elle, d'ailleurs, tous les avantages désirables, elle doit être rejetée, par cela seul qu'elle fait dépendre la géométrie d'une notion qui ne lui est point essentielle, la notion du mouvement.

7. De pareils scrupules sont-ils bien légitimes? Doivent-ils être respectés; ou bien faut-il y voir un excès de rigorisme qui sacrifie le fond à la forme, et fait perdre plus que gagner dans la poursuite d'une perfection imaginaire? Laissons à d'autres le soin de résoudre cette question délicate, et, sans abandonner les définitions proposées ci-dessus, cherchons à les modifier de manière à les rendre acceptables pour tous. Les conditions à remplir sont les suivantes :

Il faut que les définitions nouvelles se rapprochent autant que possible des anciennes; qu'elles soient, comme elles, purement géométriques; qu'elles aient chacune leur fécondité propre, et se prêtent d'elles-mêmes à toute l'extension nécessaire pour les développements ultérieurs.

Voici, dans cet ordre d'idées, quelle pourrait être la définition de la droite :

La droite est le chemin DIRECT *d'un point à un autre,*

ou bien encore :

La droite est la ligne qui va DIRECTEMENT *d'un point à un autre.*

On aurait ensuite, pour la définition de la courbe :

La courbe n'est droite sur aucune étendue, grande ou petite. C'est une ligne où, d'un point quelconque à un autre point aussi rapproché qu'on veut du premier, la DIRECTION *change incessamment.*

8. Dire de la droite qu'elle est le chemin *direct* d'un point à un autre, ou, mieux peut-être, la ligne qui va *directement* d'un point à un autre, c'est s'en tenir presque littéralement à la définition vulgaire. Au lieu du chemin le plus court, nous disons le chemin *direct;* au lieu d'aller par le chemin le plus court, nous disons aller *directement.* Il ne semble point qu'il y ait là aucun changement notable, soit pour la forme, soit pour le fond. Sous ce rapport, notre définition pourrait être acceptée tout aussi bien

que l'ancienne. D'un autre côté, nous la croyons préférable, et voici pourquoi.

Elle éveille tout d'abord l'idée de direction, cette idée capitale qui se lie intimement à celle de la droite et dont le rôle grandit de plus en plus à mesure qu'on en comprend mieux l'extension. Elle prépare l'esprit à la conception de la courbe, et le met sur la voie qui lui permettra, plus tard, de distinguer nettement en quoi la courbe et la droite diffèrent et se ressemblent. Dans la droite, il n'y a partout qu'une seule et même direction qui se conserve et persiste sans jamais se modifier : c'est la permanence d'une direction unique qui fait de la droite le chemin le plus court entre deux quelconques de ses points. *Cette permanence dans la direction est à ce chemin le plus court ce que la cause est à l'effet, ce qu'un principe est à sa conséquence immédiate.*

Que l'on veuille bien y réfléchir et l'on sera, pensons-nous, de notre avis. En disant de la droite qu'elle est le chemin le plus court d'un point à un autre, on énonce une propriété de la droite. En disant qu'elle est le chemin *direct* ou qu'elle va *directement* d'un point à un autre, on n'accuse pas seulement cette propriété, on dit sa raison d'être, on remonte plus haut, on pénètre plus avant dans la nature intime de la droite, on en saisit l'essence. *La droite*, par son tracé, *rend la direction sensible* : voilà tout. Quant à la direction, considérée en elle-même d'une manière absolue, elle subsiste, indépendamment de tout tracé et antérieurement. *Alors que le tracé commence, elle est déjà tout entière à l'origine du tracé.* C'est par là qu'elle rend le commencement du tracé possible, de même qu'en se conservant, elle en permet la continuation. Pour que le tracé s'effectue, il faut avant tout qu'il commence, et, après avoir commencé, qu'il continue, c'est-à-dire qu'il recommence sans cesse à partir de chaque point où il parvient successivement. Or, comment pourrait-il commencer, si ce n'est en vertu d'une direction déterminée d'avance ou préexistante? Comment pourrait-il se continuer, c'est-à-dire recommencer sans cesse, si ce n'est en vertu de cette même direction, devenue permanente et, par sa permanence, rendue sensible dans le tracé déjà effectué.

Notre définition de la droite, comparée à l'ancienne, nous paraît avoir

la supériorité qu'un principe a snr ses conséquences. On objectera peut-être qu'au début de la géométrie, il serait difficile d'exposer clairement l'idée abstraite de direction, et de la faire pénétrer dans l'esprit des élèves dégagée de toute obscnrité. Est-ce une raison ponr ne pas le tenter? Nous répondons, d'ailleurs, qu'en adoptant la définition nouvelle, on reste libre de lui donner *graduellement* toute l'extension qu'elle comporte. Rien n'empêche de la restreindre d'abord au sens exprimé par la définition vulgaire, et de s'en tenir aux errements anciens, tant qu'ils peuvent suffire. Dans le système d'enseignement qui prévant anjourd'hui, il ne faut pas aller bien loin pour se heurter à la conception la plus inexplicable. A peine a-t-on prononcé le nom de mécanique élémentaire, à peine l'objet de cette science est-il défini, que déjà l'on est en présence des infiniment petits, et qu'on s'appuie sur eux pour faire les premiers pas. Sont-ce là des errements à suivre? faut-il au contraire les abandonner? Selon nous, le doute n'est pas permis. Il suffit, en effet, d'approfondir la définition de la droite et d'en saisir le sens intime, pour suppléer avec avantage à toutes les ressources que l'emploi des quantités infinitésimales peut offrir. Or, en admettant qne l'idée abstraite de direction présente d'abord quelque obscurité, peut-on néanmoins la mettre en parallèle avec la conception de ces quantités chimériques qu'on dit suspendues entre l'être et le néant, sans prendre garde qu'un tel mode d'existence n'est pas seulement inintelligible, mais en ontre absurde et contradictoire. Si l'étude de la géométrie avait pour objet d'habituer les élèves à se payer de mots; si l'on s'y proposait de fausser le jugement et d'humilier la raison, en imposant, comme articles de foi, des principes que le bon sens repousse, on comprendrait que, suivant les conseils tout récents d'un oratorien moderne [1], on introduisît en mathématiques élémentaires la notion des grandeurs infinitésimales. Dans toute autre hypothèse, rien n'autorise un pareil abus, et c'est ôter tout prétexte à l'emploi des infiniment petits, que de leur opposer une conception rationnelle qui permette de les abandonner. L'idée abstraite de direction offre, sous ce rapport, tous les avantages, toutes les

[1] Voir *Logique du père Gratry*, t. II, p. 369 et suivantes.

facilités désirables. Son seul défaut est d'exiger quelques efforts pour être bien comprise au début. C'est là sans doute un inconvénient, mais il s'atténue de lui-même, à mesure que la faculté d'abstraire se développe. Pour être en droit d'arguer d'un inconvénient aussi minime, contre une notion d'ailleurs inattaquable, il faudrait s'abstenir de tout emploi des infiniment petits. Autrement il est absurde d'écarter une notion rationnelle sous prétexte d'un défaut de clarté, et d'admettre à sa place la plus obscure de toutes les conceptions, une conception impossible.

9. Quelques mots maintenant sur la définition de la courbe.

En disant de la courbe qu'elle n'a aucune partie droite; nous n'apprenons rien, sinon qu'elle n'est ni droite, ni composée de parties droites. C'est la définition vulgaire, qui procède par voie de négation, et demeure stérile faute d'aucun rapport avec la nature intime de la courbe.

En ajoutant que la courbe est une ligne où, d'un point quelconque à un autre point aussi rapproché qu'on veut du premier, la direction change incessamment, nous allons plus loin, et cela peut suffire.

Supposons d'abord que l'on soit au début de la géométrie élémentaire, et qu'on ne veuille point encore faire intervenir l'idée abstraite de direction. On se contentera de montrer comment la direction change incessamment, pour toute corde aboutissant par une extrémité à un point quelconque, choisi comme on voudra; par l'autre extrémité, à un second point qui se déplace continûment et se rapproche indéfiniment du premier.

Supposons ensuite que le moment soit venu de donner aux définitions de la droite et de la courbe toute leur extension, on aura recours à l'idée abstraite de direction, tenue jusque-là en réserve. On dira comment la direction subsiste tout entière à l'origine et, par conséquent, en chaque point de tout tracé; comment, s'il s'agit de la droite, la direction affecte partout la même détermination, et se manifeste en revêtant pour forme le type sensible de cette détermination unique et permanente; comment, au contraire, s'il s'agit de la courbe, la direction change incessamment d'un point à un autre, et passe ainsi par une suite de déterminations dont aucune ne persiste sur la moindre étendue, dont aucune, par conséquent,

ne parvient jamais à s'isoler des autres, à se dégager complétement, à se manifester par un effet sensible où seule elle apparaisse.

10. On voit par ces détails en quoi peut consister l'avantage offert par nos définitions de la droite et de la courbe (n° 7) : d'un côté, elles ont un sens concret plus étendu que celui des définitions vulgaires et non moins facile à saisir; de l'autre, elles ont un sens abstrait, qui va au fond des choses définies et en accuse la nature intime. Au début, le sens concret peut suffire, soit qu'on s'y tienne exclusivement, soit qu'on fasse entrevoir plus ou moins le sens abstrait qui le complète. Plus tard, le sens abstrait devient indispensable : on s'y arrête alors, et c'est en lui qu'on puise les ressources dont on a besoin pour les applications ultérieures.

CHAPITRE II.

DE LA VITESSE CONSIDÉRÉE DANS SA DÉFINITION ET DANS SA NATURE INTIME.

11. La mécanique s'enseigne aujourd'hui en commençant par l'étude du mouvement d'un point. Dans ce phénomène, le premier objet à considérer et à définir est ce qu'on nomme la vitesse. Qu'est-ce que la vitesse dans un point qui se meut? Telle est, dans le système actuel d'enseignement, la question qui se présente au début de la mécanique.

Pour aller du simple au composé, on suppose d'abord un mouvement uniforme. L'uniformité implique la proportionnalité des espaces parcourus aux temps employés pour les parcourir. Le rapport d'un espace quelconque au temps nécessaire pour franchir cet espace est donc une quantité constante. Cette quantité constante sert à définir la vitesse, et c'est ainsi qu'on adopte, en général, la définition suivante :

Dans le mouvement uniforme, la vitesse est l'espace décrit pendant l'unité de temps.

S'agit-il ensuite du mouvement varié? On l'assimile au mouvement uni-

forme, en imaginant des intervalles de temps infiniment petits, qui se succèdent de manière à reproduire la durée totale, et, pendant chacun desquels il y a, par hypothèse, uniformité. Dans ce système, on désigne par dt ce qu'on appelle un instant infiniment petit, et par de l'espace franchi pendant ce même instant. L'espace de est, comme le temps dt, infiniment petit. La vitesse est le rapport de cet espace à ce temps, c'est-à-dire qu'en la désignant par v, elle a pour expression générale

$$v = \frac{de}{dt}.$$

De là cette autre définition plus étendue que la première, et applicable à tout mouvement d'un point :

La vitesse est le rapport d'un espace quelconque infiniment petit, au temps infiniment petit employé pour décrire cet espace.

12. N'oublions pas qu'en procédant ainsi, l'on s'adresse à des commençants; n'oublions pas qu'on ne doit employer aucun mot dont le sens ne soit pas compris, aucune hypothèse d'effets instantanés propre à fausser les idées.

Comment les élèves entendront-ils ce qu'on nomme un espace, un temps infiniment petits? S'agit-il seulement de quantités très-petites, ou bien de ces êtres chimériques que nous avons déjà signalés, et qui sont absolument inintelligibles? Dans le premier cas, il est faux qu'nn mouvement varié se compose d'une suite de petits mouvements uniformes, se succédant sans intervalles, et différant les uns des autres par la vitesse. Pour qu'il pût en être ainsi, il faudrait qu'à chacun des instants sans durée, pris pour limite commune à deux quelconques de ces mouvements uniformes, la vitesse changeât brusquement d'une certaine quantité. En vain supposerait-on cette quantité très-petite, elle n'en constituerait pas moins un de ces effets instantanés, que M. Fortoul signale avec raison *comme propres à fausser les idées*, et *dont on doit*, en conséquence, *écarter jusqu'à la moindre hypothèse.* Dans le second cas, l'inconvénient n'est pas moins grave : les mots dont on se sert restent dépourvus de sens, et ils échap-

pent à l'intelligence du professeur tout aussi bien qu'à celle des élèves.

Ces simples remarques suffisent pour montrer combien les sages instructions de M. Fortoul ont été méconnues dans tous les traités de mécanique élémentaire, où l'on définit la vitesse comme nous l'avons indiqué tout à l'heure. Nous ajouterons que, sans sortir des sentiers battus, il était possible de donner une définition plus exacte. On pouvait, par exemple, s'exprimer comme il suit :

Soit Δe *l'espace décrit à partir de l'instant* t, *pendant le temps* Δt; *la vitesse, à ce même instant, est la limite vers laquelle le rapport* $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ *converge, lorsqu'on dispose de l'intervalle* Δt *et qu'on le fait décroître indéfiniment.*

Cela revient à écrire,

$$v = \lim \frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

et l'on voit que l'exactitude du fond n'exclut pas la simplicité de la forme.

13. Nous n'insisterons pas sur ce fait étrange, qu'une méthode absurde dans son principe et contradictoire dans ses conséquences puisse être préférée à une méthode rationnelle. Il ne s'agit pas ici d'un choix à faire entre des notions qu'on emprunterait soit à la méthode des limites, soit à l'analyse infinitésimale. La question doit être prise de plus haut : en effet, si des difficultés surgissent lorsqu'on veut définir la vitesse dans le mouvement varié, cela tient à ce qu'elle est mal définie dans le mouvement uniforme, et non point à ce que le mouvement varié introduit une complication propre à réagir sur la vitesse et à en modifier l'essence. De part et d'autre, la vitesse est une seule et même chose, ayant une seule et même nature, admettant une seule et même définition. Ainsi que la direction dans la ligne droite ou courbe, elle a son essence propre, et cette essence se retrouve tout entière dans chacun des états qu'elle affecte, soit qu'elle demeure invariable, soit qu'au contraire elle subisse une variation incessante.

Dans le langage usuel, on entend par vitesse d'un corps la rapidité plus ou moins grande du mouvement qui anime ce corps. Quelques auteurs empruntent ces mêmes termes ou des termes équivalents pour donner une

idée de la vitesse dans un point qui se meut. Toutefois, ils passent outre, et voulant préciser davantage, ils s'arrêtent aux définitions que nous avons d'abord reproduites. Nous pensons qu'il faut procéder autrement.

14. Lorsque, dans le mouvement uniforme d'un point, l'on dit que la vitesse est l'espace décrit pendant l'unité de temps, l'on confond, selon nous, l'effet avec la cause, le principe avec sa conséquence, la mesure avec la chose à mesurer. Nous comprendrions que l'on dît :

La vitesse A POUR MESURE *l'espace décrit pendant l'unité de temps.*

Cette façon de dire serait irréprochable. Si, d'ailleurs, il est exact de s'exprimer ainsi, il ne l'est pas d'identifier la vitesse avec un espace quelconque pris pour sa mesure. La vitesse est à l'espace parcouru ce que l'angle décrit par une droite est à l'arc correspondant sur la circonférence de cercle ayant son centre au sommet de l'angle. L'arc n'est pas l'angle, bien qu'il lui serve de mesure. De même aussi l'espace parcouru se distingue de la vitesse tout en la mesurant.

Prenons un autre exemple et, pour rendre l'analogie plus frappante, empruntons-le au mouvement uniformément varié, tel qu'il se produit sous l'action d'une force constante en grandeur et en direction. Dans ce mouvement, la force est à l'accélération produite, ce que la vitesse, dans le mouvement uniforme, est à l'espace décrit. Telle est d'ailleurs l'analogie, que les deux mouvements, mis en parallèle, peuvent s'exprimer par une seule et même équation linéaire

$$y = at + b;$$

a et b étant des constantes, t le temps écoulé à l'instant que l'on considère.

S'agit-il du mouvement uniformément varié, a est la force, $y-b$ l'accélération produite.

S'agit-il du mouvement uniforme, a est la vitesse, $y-b$ l'espace décrit.

On voit par là qu'il n'y a pas simplement similitude, mais bien identité complète de relation. Ce sont donc les mêmes rapports, la même dépendance, qui s'établissent d'une part entre la force et l'accélération, d'autre part entre la vitesse et l'espace décrit. Or, dans le mouvement uniformé-

ment varié, la force est le principe direct, la cause immédiate de l'accélération. Donc aussi, dans le mouvement uniforme, la vitesse agit comme principe direct, comme cause immédiate de l'espace parcouru.

Lorsqu'il s'agit du mouvement uniformément varié, on se garde bien de confondre la force avec l'accélération qu'elle produit. De lui-même, l'esprit se révolte à l'idée d'une pareille confusion entre la cause et son effet sensible. La confusion n'est pas moindre, elle est absolument la même, lorsque, dans le mouvement uniforme, on prend pour la vitesse l'espace décrit pendant l'unité de temps. Cet espace n'est point la vitesse, il ne fait que la mesurer; distinction capitale, non moins importante ici que pour la force et l'accélération. Il saute aux yenx que la force ne serait pas définie, ou le serait très-mal, si, prenant l'effet pour la cause, on identifiait la force avec l'accélération. De même, on ne définit pas la vitesse lorsqu'on la fait consister en un espace décrit; on la confond avec sa mesure : rien de plus, rien de moins.

15. Après avoir reconnu que les formules adoptées pour définir la vitesse s'appliquent à la mesure de la vitesse et non point à la vitesse proprement dite, il convient de chercher quelque autre définition plus satisfaisante.

Un point se meut. Le déplacement continu de ce point a-t-il pour cause immédiate et nécessaire l'action d'une force extérieure? Non, sans aucun doute. La preuve en est dans le mouvement uniforme qui se conserve de lui-même, et où nulle force extérieure ne peut intervenir sans qu'il se modifie. Considéré en lui-même le déplacement d'un point qui se meut est évidemment un effet. Cet effet, comme tout autre, dérive nécessairement d'une cause première, et si celle-ci n'agit pas comme cause immédiate, il faut qu'il y ait entre elle et l'effet une cause seconde. Or, en supposant que le déplacement, pris à son origine, ait eu pour cause première l'action d'une force extérieure, il n'en faut pas moins admettre qu'il peut continuer après que la force extérieure a cessé d'agir; et, puisqu'il subsiste alors sans que la force agisse, il a pour cause actuelle et immédiate autre chose que l'action première de la force extérieure. De là résulte, comme cause immédiate du déplacement observé, une cause dis-

tincte de toute action extérieure : cette cause consiste dans un état de mouvement qui, par lui-même et en vertu de sa propre essence, tend à se conserver. Elle constitue ce qu'on nomme *la vitesse.*

Lorsqu'un point matériel, supposé libre, est soumis à l'action d'une force, la force agit directement comme cause de changement d'état. Le changement d'état consiste dans le passage du repos à l'état de mouvement, ou, plus généralement, dans le passage d'un état de mouvement à un autre. C'est en vertu de l'état de mouvement, acquis sous l'action de la force, que le point se meut. Cet état constitue la vitesse du point et tend par lui-même à se conserver. Tel est l'ordre successif des phénomènes. La force extérieure agit comme cause première. Elle a pour effet direct un changement d'état. L'état acquis agit à son tour comme cause immédiate du mouvement sensible. On distingue la force du changement d'état qu'elle produit, et par lequel on peut la mesurer. On doit également distinguer l'état de mouvement acquis de l'espace qu'il fait décrire, et où se trouve sa mesure.

Pour compléter ces notions fondamentales, il suffit d'ajouter quelques mots.

Concevons deux droites qui se coupent, et un point qui se meuve de lui-même sur l'une ou sur l'autre. Imaginons d'ailleurs que nous soyons à l'instant précis où le point mobile passe par l'intersection de ces droites. En tant qu'il s'agit du point, considéré *extérieurement* dans cette position *transitoire,* tout est identique, soit qu'il aille plus ou moins vite, soit qu'il parcoure l'une ou l'autre des deux droites. Par hypothèse, le point se meut. Comment? Rien jusqu'ici ne l'accuse. Tout à l'heure la direction suivie, l'espace parcouru *révéleront* le mouvement du point *en le rendant sensible;* mais, *dans ce qui va suivre,* rien ne vient du dehors. Rien, par conséquent, ne peut surgir qui déjà n'ait en soi sa raison d'être, son principe. Si donc, à partir de l'intersection des deux droites, la ligne suivie et l'espace parcouru *témoignent* d'une vitesse déterminée en direction et en grandeur, il faut qu'à l'instant même où le point mobile occupe cette intersection, la vitesse ainsi déterminée se trouve en lui tout entière. De là un état particulier du point qui se meut, *état purement interne,* et

qu'aucun signe extérieur ne manifeste : c'est l'*état de mouvement* proprement dit, c'est le principe immédiat, c'est la cause incessante du passage d'un lieu dans un autre lieu; c'est en un mot *la vitesse.* Les déplacements effectifs, les espaces décrits, sont de simples effets propres à caractériser l'état de mouvement et à le rendre sensible.

16. S'agit-il maintenant de définir la vitesse, nous dirons simplement,

La vitesse d'un point est l'état de mouvement qui anime ce point.

Nous ajouterons ensuite,

Dans la vitesse, on distingue trois choses : la grandeur, la direction, le sens.

La grandeur et la direction comportent chacune deux modes d'existence, selon qu'elles sont constantes ou qu'au contraire, elles varient incessamment. Dans le premier cas, il y a permanence d'une détermination unique, toujours la même; dans le second, il y a succession continue d'une suite infinie de déterminations toutes transitoires et purement instantanées. Que la vitesse demeure invariable ou qu'elle ne cesse pas de se modifier, peu importe en ce qui concerne chacun des états qu'elle affecte. Il y a toujours et à chaque instant détermination complète de tout ce qui la constitue, sens, direction, grandeur. Il en est autrement des effets qui la rendent sensible. Ces effets ne sont que par leur développement et, pour qu'ils se produisent, une certaine durée est absolument nécessaire.

Lorsque la vitesse est constante en grandeur et en direction, elle a partout un seul et même mode d'action qui transporte dans l'effet l'uniformité de la cause, et se révèle ainsi de lui-même, sans que rien le voile ou le dissimule. Lorsque la vitesse varie, les effets produits dépendent à la fois de ce qu'elle est à leur origine et des modifications qu'elle subit pendant leur développement. Ils se compliquent en raison de ces modifications, dont il faut qu'ils témoignent tout aussi bien que de la grandeur et de la direction premières. De là vient que, faute de pouvoir se dégager isolément, cette direction et cette grandeur sont plus ou moins voilées dans les effets produits.

De là résultent, en ce qui concerne la mesure de la vitesse et sa détermination, les énoncés suivants :

Dans le mouvement uniforme, la vitesse a pour mesure l'espace décrit pendant l'unité de temps. Déterminée en grandeur par cet espace, elle l'est en direction par la droite suivant laquelle le mouvement a lieu.

Dans le mouvement varié, la vitesse a pour mesure l'espace qui serait décrit pendant l'unité de temps, si, à partir de l'instant que l'on considère, elle cessait d'être variable et persistait dans l'état qu'elle affecte. Déterminée en grandeur par cet espace, elle l'est en direction par la droite suivant laquelle le mouvement aurait lieu dans la même hypothèse.

Il suit de là que, pour chaque position d'un point qui se meut, la direction de la vitesse est fixée par la tangente à la ligne décrite.

Soient, d'ailleurs,

Δt un intervalle quelconque compté à partir de l'instant t;

Δe l'espace décrit pendant cet intervalle;

v la grandeur de la vitesse à l'instant t;

dt un intervalle quelconque, égal ou non à l'intervalle Δt et compté à partir du même instant t;

de l'espace qui *serait décrit*, pendant l'intervalle dt, *si la vitesse conservait* sa grandeur première v;

On a d'abord et évidemment

$$v = \frac{de}{dt}.$$

Or, dans le cas d'une vitesse incessamment variable, il suffit de resserrer convenablement l'intervalle Δt pour que la variation ne puisse pas cesser d'être continue. On a donc aussi

$$v = \lim \frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

Rien de plus simple à démontrer que cette dernière formule.

Par cela seul que la vitesse change incessamment, à partir de l'intant t,

elle commence par croître ou par décroître, et elle ne cesse pas de croître toujours ou de toujours décroître pendant un certain temps. Supposons l'intervalle Δt égal ou inférieur au temps pendant lequel la vitesse reste toujours croissante ou toujours décroissante. Soit, d'ailleurs, Δv le changement subi par la vitesse durant cet intervalle. Si la vitesse demeurait constante pendant l'intervalle Δt, selon qu'elle serait égale à v ou à $v + \Delta v$, l'espace décrit aurait pour expression $v\Delta t$ ou $(v + \Delta v)\,\Delta t$. En réalité, l'espace Δe est décrit avec une vitesse variable, toujours croissante ou toujours décroissante entre les valeurs extrêmes v et $v + \Delta v$. Cet espace reste donc nécessairement compris entre $v\Delta t$ et $(v + \Delta v)\,\Delta t$. On a, en conséquence,

$$\Delta e = v\Delta t + \mu\Delta v.\Delta t.$$

μ étant une fraction.

De là résulte

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = v + \mu\Delta v.$$

or Δv converge vers zéro en même temps que chacune des différences Δe, Δt : v est donc la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ à mesure que l'intervalle Δt devient de plus en plus petit. C'est ce qu'on exprime en écrivant

$$v = \lim \frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

Après avoir démontré cette formule, disons sa raison d'être. Lorsqu'on resserre de plus en plus l'intervalle Δt, l'on ne change point, dans le rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, ce qui provient de la vitesse v, prise avec sa grandeur première, et supposée constante : on ne fait qu'amoindrir indéfiniment la partie de ce rapport qui dépend des modifications continues subies par la vitesse. Or, par cela seul que cette partie du rapport $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ se trouve assujettie à converger vers zéro, il faut qu'à la limite elle s'évanouisse d'elle-même. On a donc nécessairement

$$v = \frac{de}{dt} = \lim \frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

17. Nous voilà revenus aux formules dont nous avons parlé en commençant ; mais combien n'avons-nous pas gagné ! Toute confusion a cessé, tout mystère a disparu. Chaque formule a sa signification rationnelle et son usage propre nettement indiqués. S'agit-il, en particulier, de l'équation symbolique

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad v = \frac{de}{dt},$$

il n'est plus question de ces quantités infiniment petites, qui deviennent inintelligibles lorsqu'on prétend les tenir suspendues entre l'être et le néant, et qui font de l'équation (1) soit un non-sens, soit une relation fausse, selon qu'on les suppose nulles ou finies. Pour nous, les symboles de, dt expriment des grandeurs algébriques tout aussi bien définies et non moins faciles à concevoir que les différences ordinaires Δe, Δt. S'ils s'en distinguent, c'est uniquement par une hypothèse qui les ramène à n'être au fond que des différences ordinaires, et parmi celles-ci les plus simples de toutes.

18. Nous avons admis précédemment qu'en géométrie élémentaire, l'on pouvait s'en tenir aux définitions vulgaires de la droite et de la courbe ; autre chose est de la vitesse dans les éléments de mécanique. Pour être bien définie, la vitesse exige impérieusement qu'on rejette le secours dangereux des infiniment petits, et qu'on y supplée par l'emploi des notions purement rationnelles que nous avons développées. Ici ces notions deviennent indispensables. Faut-il attendre jusque-là pour y recourir, ou ne vaut-il pas mieux emprunter leur aide dès l'abord, les introduire au début de la géométrie, et compléter ainsi les définitions de la droite et de la courbe ? Chacun appréciera. Selon nous, l'on ne saurait s'y prendre trop tôt pour éveiller dans l'esprit des élèves l'idée abstraite de direction. Que l'on suive ou non la marche ordinaire, c'est toujours éclairer ses pas et se ménager pour la suite de précieuses ressources que de commencer par un aperçu plus ou moins approfondi de la nature intime des lignes droite ou courbe.

En résumé, dès qu'on aborde l'étude de la mécanique, il est impos-

sible de se faire une idée précise de la vitesse, si on ne la considère pas en elle-même, indépendamment de tout espace décrit, et, par conséquent, dans chacune de ses déterminations purement instantanées. Alors surgit la nécessité de voir dans la vitesse non pas une cause inséparable des effets qu'elle produit et se confondant avec eux, mais bien une cause essentiellement distincte de ces mêmes effets dont elle est le principe, et qui la rendent sensible, par leur développement dans le temps et l'espace. L'idée abstraite de vitesse se présente ainsi forcément dès le début de la mécanique élémentaire; il est clair, d'ailleurs, qu'elle implique l'idée abstraite de direction.

Un point se meut; donc, *à chaque instant*, une certaine vitesse l'anime. Que cette vitesse soit constante ou bien incessamment variable, peu importe, elle est toujours et, à chaque instant, complétement déterminée, non-seulement en grandeur, mais aussi en sens et en direction. Il y a donc dans le point qui se meut, et par cela seul qu'il se meut, une direction actuelle purement instantanée. On voit ainsi que l'idée abstraite de direction est intimement liée à l'idée abstraite de vitesse, celle-ci ne pouvant subsister sans impliquer celle-là, et toutes deux jaillissant ensemble avec une entière évidence. En vain voudrait-on repousser l'idée abstraite de direction sous le prétexte qu'à l'origine elle présente quelque obscurité. Quoi qu'on fasse, on ne tarde point à voir cette idée surgir devant soi, et comme alors elle s'impose d'elle-même par sa propre puissance, il n'y a plus lieu d'examiner s'il faut ou non l'accueillir.

Voilà donc l'idée abstraite de direction élevée au rôle qui lui appartient, et forcément introduite, sinon en géométrie élémentaire, où l'on peut s'en passer, au moins dans les éléments de la mécanique, où elle devient indispensable. Il semble dès lors assez naturel qu'au début de la géométrie, on s'efforce de la faire entrevoir et même de l'admettre définitivement. L'importance qui s'y attache sera mieux appréciée, lorsque nous aurons indiqué, dans la suite de ce travail, l'extension qu'elle comporte, les avantages qu'elle procure, les ressources qu'elle fournit; et, d'abord, donnons un aperçu des applications possibles en géométrie élémentaire, c'est-à-dire au début même de la science mathématique.

CHAPITRE III.

APERÇU DES APPLICATIONS POSSIBLES EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

19. Nous avons vu que, dans la génération de la courbe, il y avait à considérer le double mouvement d'un point et d'une droite, le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point [1].

Pour donner un exemple de ce double mouvement, pour le rendre sensible et en quelque sorte matériellement palpable, pour lever ainsi toute difficulté, nous avons emprunté l'image d'un fil qu'on maintient tendu en même temps qu'on l'enroule sur une circonférence de cercle.

Par là tout s'éclaircit, rien d'obscur ne reste, et l'on peut, sans crainte d'aucun malentendu, adopter la définition suivante :

La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite, tandis que la droite tourne autour de ce point.

Cette définition peut à volonté s'étendre ou se restreindre. Si l'on s'arrête au sens qu'elle exprime littéralement, elle n'a ni la fécondité ni la puissance de celles où l'on fait intervenir explicitement l'idée abstraite de direction. Elle rachète ce désavantage par une clarté plus grande empruntée à un mode de représentation sensible et, pour ainsi dire, matérielle; elle suffit, d'ailleurs, pour rendre possible la démonstration *à priori* du *postulatum* d'Euclide et l'introduction en géométrie élémentaire des notions les plus précises sur la courbure des courbes. Sous ce rapport, elle va plus loin que la méthode infinitésimale, et cela, sans cesser d'être purement rationnelle.

[1] Les partisans de la courbe polygone admettent, comme nous, ce mode de génération. Il n'y a de différence qu'en ce qu'ils excluent la simultanéité des deux mouvements et que, par conséquent, ils mettent la discontinuité là où la continuité règne exclusivement.

Démonstration du postulatum d'Euclide.

20. Nous nous bornerons à reproduire ici les points principaux d'une démonstration déjà publiée [1] avec tous les développements nécessaires pour une solution complète et rigoureuse.

On sait que le *postulatum* d'Euclide peut être suppléé par l'une ou l'autre des propositions suivantes :

1° *Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite ;*

2° *Deux droites perpendiculaires à une même troisième et situées dans le même plan sont équidistantes;*

3° *Lorsqu'une droite passant par un point fixe tourne autour de ce point, de manière à décrire un angle, elle tourne en même temps du même angle par rapport à toute droite située dans son plan.*

Ce que nous allons démontrer, c'est l'équidistance de deux droites perpendiculaires à une même troisième et situées dans le même plan.

1re PROPOSITION.

Lorsque deux droites situées dans le même plan ont une perpendiculaire commune, aucune perpendiculaire, abaissée de l'une des droites sur l'autre, ne peut être moindre que la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Cette proposition résulte directement et immédiatement de ce que la droite *est le plus court chemin d'un point à un autre* [2].

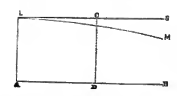
[1] Voir l'ouvrage intitulé : *Démonstration du postulatum d'Euclide.*

[2] Voir, au besoin, pour la démonstration, l'ouvrage intitulé : *Démonstration du postulatum d'Euclide.*

On sait la liaison intime existant entre la propriété qu'a la droite d'être le plus court chemin d'un point à un autre, et cette proposition : *La somme des angles d'un triangle rectiligne ne peut dépasser deux droits.* La difficulté consiste à démontrer que cette somme ne peut être inférieure à deux droits. De même, ici, rien n'est plus simple à établir que l'impossibilité d'un rapprochement entre deux droites perpendiculaires à une même troisième. Ce qui est difficile, c'est de prouver que l'écartement de ces droites ne peut jamais excéder la perpendiculaire commune.

2me PROPOSITION.

Lorsque deux droites, situées dans le même plan, sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont équidistantes, et toute transversale perpendiculaire à l'une des deux droites est en même temps perpendiculaire à l'autre.



Soient LS et AB deux droites perpendiculaires à une même troisième AL.

Nous savons déjà qu'aucune des perpendiculaires abaissées de LS sur AB ne peut être moindre que LA. Supposons que, parmi ces perpendiculaires, il y en ait une CD égale à LA; en ce cas, l'on démontre aisément que les droites LS, AB sont partout équidistantes, et que toute droite perpendiculaire à BA est en même temps perpendiculaire à LS.

Il ne reste donc à examiner que l'hypothèse où toute perpendiculaire CD abaissée de LS sur AB l'emporte en grandeur sur la perpendiculaire commune AL.

Dans cette hypothèse, on établit successivement et sans aucune difficulté les propositions suivantes :

Le lieu géométrique des points situés au-dessus de la droite AB, à la distance AL, est une courbe LM passant par le point L et située tout entière au-dessous de la droite LS.

La courbe LM admet deux modes de génération essentiellement distincts.

Elle est d'abord et évidemment la trace du point L, lorsque la droite AB glisse sur elle-même et entraîne avec elle la perpendiculaire AL.

Elle est ensuite la trace de ce même point, lorsqu'on le suppose entraîné dans le double mouvement, d'où résulte en général la description de toute ligne courbe [1].

[1] Voir l'ouvrage désigné ci-dessus (p. 27 en note), pour la démonstration complète et rigoureuse effectuée directement sur la courbe hypothétique LM.

Ici les deux mouvements à considérer sont respectivement :

1° Une translation du point L sur la droite LS;

2° Une rotation de la droite LS autour du point L.

On remarque, d'ailleurs, que, si d'une position quelconque occupée par le point générateur, on abaisse une perpendiculaire sur la droite AB, la position correspondante de la directrice LS reste toujours relativement la même, c'est-à-dire que l'angle de la directrice avec cette perpendiculaire est constamment droit.

Considérons la génération de la courbe LM, alors qu'elle s'effectue par le double mouvement du point L sur la droite LS, et de la droite LS autour du point L. Remarquons, d'ailleurs, que le mouvement du point L sur la directrice LS peut être remplacé par un glissement de cette droite sur elle-même. Pour le voir clairement, il suffit d'imaginer en LS deux droites superposées, dont l'une soit libre de glisser sur l'autre et liée au point L, qui l'entraîne ainsi dans son propre mouvement; eu égard à cette observation, l'on peut dire :

La courbe LM est la trace du point L, entraîné par la droite LS, qui glisse sur elle-même en même temps qu'elle tourne autour de ce point [1].

Concevons qu'à l'origine de cette génération le point L, entraîné par la droite LS, rencontre comme obstacle à sa marche le système des droites LA, AD, fixées à angle droit l'une sur l'autre et libres de se mouvoir ensemble par glissement du côté AD sur la droite indéfinie AB. Poussée par le point L, qui la chasse devant lui, l'équerre LAD cède en glissant, comme je viens de l'indiquer. Par le simple effet de ce glissement, le point L, considéré comme fixe sur la perpendiculaire LA, décrit la courbe LM; mais c'est autour de ce point L, déjà supposé fixe sur la droite LS, que s'accomplit la rotation incessante de cette droite mobile. Il s'ensuit donc que la droite LS et l'équerre LAD forment ensemble un système où tout

[1] Veut-on une image sensible de ce double mouvement? Que l'on considère une corde glissant dans un cercle, sans cesser d'appuyer ses deux extrémités sur la circonférence. Le point milieu de la corde décrit une circonférence de cercle, la corde glissant sur elle-même et tournant autour de ce point en même temps qu'elle l'entraîne.

se meut à la fois, et où nul changement ne peut survenir dans la position relative des diverses parties, si ce n'est celui qui résulterait de la rotation continue de la droite LS autour du point L; mais, dans ce système, l'angle de la droite LS avec le côté LA *demeure constamment droit*. Rien donc ne change dans la position relative de toutes les parties, et, s'il y a rotation continue de la droite LS autour du point L, il faut qu'en même temps la droite LA tourne autour de ce même point, dans le même sens, de la même manière, de la même quantité. La droite LA n'a qu'un seul mouvement, et ce mouvement est complétement déterminé par lui-même, c'est celui qui résulte du glissement de l'équerre LAD sur la droite fixe AB. Le glissement de l'équerre ne fait que la déplacer par rapport à AB, et, dans ce déplacement relatif, tout se passe évidemment comme si l'équerre était fixe, et que la droite AB, devenue mobile, glissât sur elle-même dans le sens BA. Or, si l'équerre est fixe, et que la droite AB glisse sur elle-même, cette droite ne sort point en réalité de la position qu'elle occupe, et dès lors *elle est comme immobile. La fixité* de l'équerre LAD, combinée avec l'*immobilité* qu'on peut attribuer à la droite AB, sans altérer en rien la position relative de la droite et de l'équerre, *exclut manifestement* toute rotation de la droite LA autour du point L [1]. De là résulte l'impossibilité absolue d'aucune rotation de la directrice LS autour de ce même point. Mais en admettant une rotation de la directrice autour du point L, on ne fait que tenir compte du mouvement propre à la droite sur laquelle se meut le point L dans la description de la courbe hypothétique LM. La rotation de la directrice étant nulle, il en résulte nécessairement que la droite LS ne doit point tourner, si l'on veut qu'en la parcourant le point L reste équidistant de la droite AB.

En résumé, l'hypothèse

$$CD > LA$$

[1] Ce résultat serait peut-être encore plus évident si l'on considérait la génération simultanée de deux courbes LM, L'M', situées symétriquement l'une au-dessus, l'autre au-dessous de la droite AB. Le point L aurait son point conjugué L', situé sur le prolongement de LA, à la distance AL' = AL. La droite LL' se composerait ainsi de deux parties égales LA, AL', qui *devraient tourner* en sens contraire, l'une autour du point L, l'autre autour du point L'. Il faudrait, *néanmoins* que chacune de ces deux parties restât tout entière sur une seule et même droite, la droite LL', ce qui est évidemment impossible ou contradictoire.

implique l'existence d'une courbe LM, équidistante de la droite AB. L'existence de cette courbe implique à son tour un mode de génération où la directrice LS doit intervenir par une rotation continue. Or, cette rotation continue de la directrice LS est démontrée impossible ou nulle. Il est donc faux que CD soit plus grand que LA. Mais, d'un autre côté, LA ne peut être plus grand que CD; il vient donc nécessairement

$$CD = LA.$$

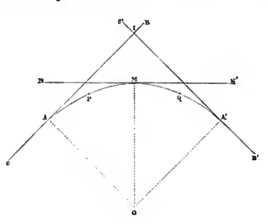
De là résulte, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, l'équidistance des droites LS, AB, et par suite leur perpendicularité commune sur toute droite CD, abaissée à angle droit l'une sur l'autre.

Génération de la circonférence de cercle.

21. Toute courbe s'engendre par le double mouvement simultané d'un point et d'une droite, le point glissant sur la droite, et la droite tournant autour du point.

Dans le cas le plus simple, le mouvement du point sur la droite directrice et celui de la droite autour du point sont tous deux uniformes; en d'autres termes, l'arc décrit par le point générateur est constamment proportionnel à l'angle dont la directrice a tourné autour de ce même point.

Considérons ce cas particulier.



Soient CAB, C'A'B', deux positions successives de la droite directrice; AA' l'arc décrit par le point générateur A, dans le passage de la première position à la seconde; M le milieu de cet arc; NMN' la position de la directrice correspondante au point M.

Si l'on revenait de la seconde position à la première, par des mouvements identiques à ceux qui ont eu lieu d'abord, mais dirigés en sens inverse, il est évident que l'arc A'MA ne différerait en rien de l'arc AMA', et que le prolongement A'C' de la droite B'A' serait situé, par rapport à l'arc A'MA, de la même façon que la droite AB l'est par rapport à l'arc AMA'.

Il suit de là que les deux figures IAMA'I et IA'MAI sont superposables, et, conséquemment, que les droites AO, A'O perpendiculaires l'une à BA, l'autre à B'A', se coupent en un point O, équidistant des points A et A'. Il s'ensuit également que la droite OM est perpendiculaire à la directrice NMN'. Or, en vertu de la proposition précédente, on a, d'une part

$$OM = AO,$$

et, d'autre part,

$$OM = OA'.$$

Il vient donc

$$OA = OM = OA'.$$

De là résulte, comme conséquence immédiate, le théorème suivant :

Les perpendiculaires, élevées sur la directrice aux deux extrémités d'un arc quelconque et en son milieu, concourent en un même point, équidistant du milieu et des extrémités.

En vertu de ce théorème, ce ne sont pas seulement les trois points A, M, A' qui se trouvent sur la circonférence décrite du point O comme centre avec le rayon OA, mais aussi les points P et Q, milieux des arcs AM, MA', puis les milieux des arcs AP, PM, MQ, QA', et ainsi de suite à l'infini. L'arc AA' se confond donc tout entier avec l'arc de cercle ayant son centre en O, et OA pour rayon.

Il est ainsi démontré que la trace d'un point qui se meut uniformé-

ment sur une droite, tandis que la droite tourne uniformément autour de ce point, est une circonférence de cercle.

Désignons par Δs la quantité dont le point générateur avance sur la droite directrice, tandis que cette droite tourne autour de ce point de l'angle $\Delta\omega$. Par hypothèse, le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta\omega}$ est constant : on a donc

$$\frac{\Delta s}{\Delta\omega} = \frac{\text{arc AMA}'}{\text{angl BIA}'} = \text{const.}$$

Mais, d'un autre côté, si l'on désigne par R le rayon de l'arc de cercle AMA′, il vient

$$R = \frac{\text{arc AMA}'}{\text{angl BIA}'}.$$

On a donc aussi

$$R = \frac{\Delta s}{\Delta\omega}.$$

On voit par là que le rayon de la circonférence décrite a pour valeur la raison de proportionnalité existant entre les grandeurs correspondantes Δs et $\Delta\omega$. Il n'importe en rien que la génération simultanée de ces deux grandeurs soit plus ou moins rapide; tant que le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta\omega}$ demeure constant, la circonférence décrite reste la même.

Génération de toute courbe plane.

22. Soit une courbe quelconque plane. Supposons qu'un point mobile se meuve uniformément le long de cette courbe. C'est là une hypothèse qui, *en général*, nous est évidemment permise. Qu'exprime-t-elle, d'ailleurs? Elle exprime simplement qu'il y a uniformité dans le mouvement du point générateur sur la droite directrice. Cela posé, deux cas seulement sont possibles, suivant que la rotation de la directrice autour du point générateur est ou n'est pas uniforme.

Dans le premier cas, l'angle décrit par la directrice d'un point à un

autre est constamment proportionnel à l'arc intercepté, et, comme nous l'avons vu tout à l'heure, cet arc est circulaire.

Dans le second cas, la directrice tourne avec une vitesse incessamment variable. Les angles qu'elle décrit ne sont pas proportionnels aux arcs interceptés, et ces arcs ne sont plus circulaires.

Soit *m* un point quelconque de la ligne décrite et *u* (*) la vitesse affectée par la directrice dans sa rotation autour de ce point. Par cela seul qu'elle varie sans cesse, la vitesse *u* semble échapper à toute mesure. Cependant rien n'empêche qu'on se la représente telle qu'elle est en *m*, indépendamment des changements qu'elle subit au delà. Rien n'empêche qu'on lui conserve, par la pensée, cette seule et même détermination supposée permanente. Qu'arrive-t-il, *dans cette hypothèse*, où la rotation de la directrice devient uniforme à partir du point *m?* Nous le savons déjà : une circonférence de cercle se substitue à la courbe réellement décrite.

Considérons d'abord cette circonférence dont nous désignerons par ρ le rayon et par ds un arc quelconque ayant son origine en *m*; $d\omega$ étant l'angle décrit par la directrice d'une extrémité à l'autre de l'arc ds, on a, conformément à ce qui précède,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\omega}{ds}$$

et l'on peut prendre ce rapport pour mesure de la vitesse *u*.

En exprimant la vitesse *u* par la formule

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{d\omega}{ds},$$

on offre à l'esprit une image sensible qui le satisfait et le repose. Toutefois, le rapport des grandeurs $d\omega$, ds, demeure inconnu, et c'est à la courbe réellement décrite qu'il faut recourir pour résoudre complétement la question proposée.

22*bis*. Soit Δs un arc mesuré à partir du point *m*, sur la courbe effec-

(*) On entend par vitesse le degré de rapidité avec lequel la rotation commence à partir du point *m*.



tive; soit $\Delta\omega$ l'angle décrit par la directrice d'une extrémité à l'autre de l'arc Δs. A partir du point m la directrice tourne avec une vitesse incessamment variable, c'est-à-dire avec une vitesse qui commence par croître ou par décroître, et qui reste toujours croissante ou toujours décroissante pendant un certain intervalle. Supposons l'arc Δs égal à cet intervalle ou plus petit. Soit d'ailleurs Δu le changement subi par la vitesse u, d'une extrémité à l'autre de l'arc Δs.

Cela posé, la vitesse u doit être considérée comme toujours croissante ou comme toujours décroissante pendant la description de l'arc Δs, c'est-à-dire à partir de la valeur u jusqu'à la valeur $u + \Delta u$.

Dans le premier cas, Δu est positif, et l'on a évidemment :

1° $\Delta\omega > u\Delta s$;
2° $\Delta\omega < (u + \Delta u)\,\Delta s$.

Dans le second cas, Δu est négatif, et l'on a de même :

1° $\Delta\omega < u\Delta s$;
2° $\Delta\omega > (u + \Delta u)\,\Delta s$.

De là résulte dans les deux cas, c'est-à-dire en général,

$$\Delta\omega = (u + \mu\Delta u)\,\Delta s;$$

μ étant une quantité comprise entre zéro et l'unité.

La valeur déduite pour u de l'équation précédente est

$$u = \frac{\Delta\omega}{\Delta s} - \mu\Delta u.$$

Cette valeur suppose uniquement que l'arc Δs ne dépasse pas un certain degré de grandeur. Elle subsiste donc nécessairement lorsque, après avoir pris l'arc Δs suffisamment petit, on l'assujettit à décroître et à converger vers zéro; mais alors la quantité Δu converge elle-même vers zéro. On voit donc clairement que la vitesse u a pour mesure la limite vers

laquelle le rapport $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ converge, lorsque chacune des grandeurs $\Delta\omega$, Δs, décroît indéfiniment. C'est ce qu'on exprime en écrivant

$$u = \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta s}.$$

La solution cherchée se trouve d'ailleurs tout entière dans la formule générale

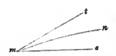
$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{d\omega}{ds} = \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta s}.$$

Nous montrerons plus loin comment, en chaque point d'une courbe plane, l'expression

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta\omega}{\Delta s}$$

se trouve entièrement déterminée par l'équation de cette courbe.

Tangentes aux courbes planes.



23. Soit *m* l'origine d'un arc *mn* pris, comme on voudra, sur une courbe plane, et *mt* la position que la directrice affecte à cette origine.

Soit *ms* une droite partant de *m* et située, par rapport à *mt*, du même côté que l'arc *mn*, dans le voisinage du point *m*.

Soit, enfin, Δs la portion d'arc décrite, à partir du point *m*, pendant le temps nécessaire à la directrice pour tourner d'un angle égal à *tms*.

L'angle *tms* étant, par hypothèse, suffisamment petit, il est visible que l'arc Δs est une partie de l'arc *mn* nécessairement comprise entre les droites *mt*, *ms*.

Imaginons que la droite *ms* tourne autour du point *m* de manière à se rapprocher indéfiniment de la droite *mt*; tant que la droite *ms* ne se confond point encore avec la droite *mt*, l'angle *tms* n'est point nul, et il y a toujours une portion Δs de l'arc *mn* comprise, à partir du point *m*, entre

les deux droites mt, ms. De là résultent évidemment les conséquences suivantes :

1° Aucune droite, aucune portion de droite, ne peut, à partir du point m, rester comprise entre la directrice et la courbe;

2° Dans le voisinage du point m, la directrice est plus rapprochée de l'arc mn que toute autre droite partant de ce même point;

3° La directrice est la limite des sécantes menées par le point m (*).

Les rapports que nous venons de signaler entre la directrice mt et l'arc mn constituent ce qu'on appelle le contact du premier ordre entre une droite et une courbe. On exprime ce rapport d'une façon brève et simple, en disant de la directrice mt qu'elle est *tangente* en m à l'arc mn.

24. S'agit-il maintenant de déterminer pour un point quelconque d'une courbe la position correspondante de la directrice, c'est-à-dire la tangente en ce point. Rien n'est plus simple.

Soit m le point choisi sur la courbe pour y mener une tangente et (x, y) les coordonnées de ce point. Soit i un second point pris sur la courbe dans le voisinage du point m, et ayant pour coordonnées

$$(y + \Delta y, x + \Delta x).$$

L'angle que la sécante mi fait avec l'axe des x étant désigné par α, l'on a généralement

$$\text{tang } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Cela posé, concevons que le point i se rapproche indéfiniment du point m. La sécante mi se rapprochera indéfiniment d'une certaine position qui n'est autre que celle de la tangente cherchée. Si donc on désigne par ω l'angle de cette tangente avec l'axe des x, on a nécessairement

$$\text{tang } \omega = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(*) Désignons par i le point où une sécante partant de m vient couper l'arc mn, et supposons que le point i se rapproche indéfiniment du point m. La sécante mi tournera autour du point m, et convergera ainsi vers une certaine position déterminée. La droite, qui fixe cette position, est désignée, en général, sous le nom de *limite des sécantes*.

L'équation de la courbe étant, par hypothèse,

$$y = f(x).$$

On sait que la limite du rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

est la dérivée $f'(x)$. On a donc

$$\text{tang}\ \omega = f'(x),$$

et, par conséquent,

$$\omega = \text{arc tang}\ f'(x).$$

25. Soit dx un accroissement quelconque de l'abscisse x, égal ou non à Δx.

Soit dy l'accroissement de l'ordonnée y, correspondant, *pour la tangente*, à l'accroissement dx, on a évidemment

$$\text{tang}\ \omega = \frac{dy}{dx}.$$

Il vient donc aussi

$$\text{tang}\ \omega = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Cette dernière équation peut être considérée comme résumant l'ensemble des rapports *rationnels* existant entre les courbes planes et leurs tangentes.

Courbure des courbes planes. — Cercle osculateur.

---

26. Considérons une courbe quelconque, autre qu'une circonférence de cercle.



Soit *amb* un arc pris, comme on voudra, sur cette courbe, et assez petit pour satisfaire aux conditions exprimées n° 22[bis].

Soit *m* un point de l'arc *amb* et *pmt* la tangente en ce point.

La vitesse angulaire de la directrice est, par hypothèse, toujours croissante ou toujours décroissante pendant la description de l'arc *amb*. Si donc elle est croissante de *m* en *b*, elle est décroissante de *m* en *a*, et réciproquement. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'elle croît de *m* en *b* et que, par conséquent, elle décroît de *m* en *a*.

Considérons séparément les arcs *mb*, *ma*, et désignons par *u* la vitesse affectée par la directrice dans sa rotation autour du point *m*. (Voir n° **22**.)

Soit *rms* l'arc de cercle qui se substituerait à l'arc *amb*, si, à partir du point *m*, en deçà comme au delà, la vitesse angulaire de la directrice demeurait constante et égale à *u*.

Puisque la vitesse *u* croît de *m* en *b*, il est visible que l'arc *mb* doit s'écarter plus que l'arc *ms* de la tangente *mt*.

De même aussi la vitesse *u* décroissant de *m* en *a*, l'arc *ma* doit s'écarter moins que l'arc *mr* de la tangente *mt*.

Il suit de là que *l'arc* rms *coupe en* m *l'arc* amb.

Cette circonstance est très-digne de remarque, vu que les arcs *rms*, *amb*, ont en *m* une tangente commune *pmt*.

Une autre circonstance non moins remarquable consiste en ce qu'aucun arc de cercle ne peut, à partir du point *m*, rester compris entre les arcs *amb*, *rms*.

Cette proposition est évidente pour tout arc de cercle passant par le point m et n'ayant pas son centre sur la normale mo. Il suffit donc de l'établir, en considérant exclusivement les arcs de cercle qui touchent en m l'arc amb.

Soit ρ' le rayon de l'un de ces arcs, supposé distinct, mais d'ailleurs aussi rapproché qu'on veut de l'arc rms.

Si, à partir du point m, la directrice tournait avec une vitesse constante, et que cette vitesse fût égale à

$$u' = \frac{1}{\rho'},$$

la ligne décrite serait précisément l'arc circulaire au rayon ρ'. (Voir n° 22.)

Cela posé, soit, en premier lieu,

$$u' > u.$$

Il est d'abord évident qu'au-dessous du point m, l'arc au rayon ρ' s'écarte de la tangente mp plus que l'arc mr. Il est donc séparé de l'arc ma par l'arc mr et, par conséquent, plus éloigné de l'arc ma que l'arc mr.

Voyons ensuite ce qui se passe au-dessus du point m.

Si faible que soit la différence $u'—u$, il y a toujours, à partir du point m, une portion de l'arc mb pour laquelle la vitesse angulaire de la directrice reste inférieure à u' et qui, par conséquent, s'écarte moins de l'arc ms que la partie correspondante de l'arc au rayon ρ'.

Soit, en second lieu,

$$u' < u.$$

Il est d'abord évident qu'au-dessus du point m, l'arc au rayon ρ' s'écarte moins de la tangente mt que l'arc ms. Il est donc séparé de l'arc mb par l'arc ms, et, par conséquent, plus éloigné de l'arc mb que l'arc ms.

Voyons ensuite ce qui se passe au-dessous du point m.

Si faible que soit la différence $u — u'$, il y a toujours, à partir du point

m, une portion de l'arc *ma* pour laquelle la vitesse angulaire de la directrice reste supérieure à u' et qui, par conséquent, s'écarte moins de l'arc *mr* que la portion correspondante de l'arc au rayon ρ'.

On voit ainsi que, dans tous les cas, il n'est aucun arc de cercle qui puisse, à partir du point *m*, rester compris entre les arcs *amb*, *rms*. De là résultent les conséquences suivantes :

1° *L'arc de cercle* rms *est, parmi tous les arcs de cercle passant par le point* m, *celui qui se rapproche le plus de l'arc* amb, *dans le voisinage du point* m;

2° *L'arc* rms *est la limite séparative des arcs de cercle qui touchent en* m *la courbe* amb, *les uns intérieurement, les autres extérieurement.*

Les rapports que nous venons de signaler entre les arcs *rms*, *amb* constituent ce qu'on appelle *le contact du second ordre*, ou *l'osculation*. Le cercle auquel appartient l'arc *rms* est dit *cercle osculateur*.

27. Nous avons vu que le cercle osculateur coupait en *m* l'arc *amb*. C'est ce qui arrive, en général. Toutefois, le point *m* pourrait être tel, qu'à partir de ce point, la vitesse angulaire de la directrice fût croissante en deçà comme au delà, ou, qu'au contraire, elle fût décroissante. Il est visible qu'alors, et pour ce point, le cercle osculateur cesserait de couper la courbe.

La courbure en un point d'une courbe dépend exclusivement du rapport qui s'établit pour ce point entre la vitesse angulaire de la directrice et la vitesse du point générateur. Lorsque ce rapport demeure invariable, l'uniformité de la cause se transporte dans l'effet, et la ligne décrite est une circonférence de cercle. Le cercle devient ainsi le type sensible de la courbure, comme la droite l'est de la direction.

Lorsque la courbure change incessamment, et c'est le cas général pour tout arc plan non circulaire, il n'en est pas moins vrai qu'elle affecte en chaque point une détermination complète ; cette détermination ne peut se manifester dans la ligne décrite, vu qu'elle n'est persistante sur aucune étendue. Veut-on toutefois la rendre sensible? Rien de plus simple. Il suffit de la supposer permanente, à partir du point que l'on considère. Dès lors,

un arc de cercle se substitue à l'arc non circulaire, et la courbure se révèle par la description du cercle osculateur.

28. Soit ω l'angle que la tangente au point m fait avec l'axe des abscisses. Nous avons établi qu'en désignant par ρ le rayon du cercle osculateur, on avait pour ce point (n° 22bis)

$$\rho = \text{Lim}\,\frac{\Delta s}{\Delta\omega}.$$

L'équation de la courbe étant d'ailleurs

$$y = f(x),$$

nous avons trouvé (n° 24)

$$\text{tang}\,\omega = f'(x).$$

Soit m' l'extrémité de l'arc Δs, (x', y') les coordonnées de ce point, ω' l'angle que la tangente en m' fait avec l'axe des x. Nous aurons de même

$$\text{tang}\,\omega' = f'(x'),$$

et, par conséquent,

$$\text{tang}\,(\omega' - \omega) = \frac{f'(x') - f'(x)}{1 + f'(x')\,f'(x)}.$$

Soit encore λ la corde de l'arc Δs, on a évidemment

$$\lambda = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Cela posé, et eu égard aux relations

$$\Delta\omega = \omega' - \omega, \qquad \Delta x = x' - x.$$

l'on peut écrire, par voie d'identité,

$$\frac{\Delta s}{\Delta\omega} = \frac{\Delta s}{\lambda}\cdot\frac{\text{tang}\,(\omega' - \omega)}{\omega' - \omega}\cdot\frac{x' - x}{f'(x') - f'(x)}\,[1 + f'(x')\,f'(x)]\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Or, si l'on passe à la limite et que l'on désigne par $f''(x)$ la dérivée de la fonction $f'(x)$ on a évidemment

1° $\text{Lim}\,\frac{\Delta s}{\lambda} = 1$

2° $\text{Lim}\,\frac{\text{tang}\,(\omega' - \omega)}{\omega' - \omega} = 1$

3° $\text{Lim}\,\frac{f'(x') - f'(x)}{x' - x} = f''(x)$

4° $\text{Lim}\,[1 + f'(x')\,f'(x) = 1 + [f'(x)]^2$

5° $\text{Lim}\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$

Il vient donc, par voie de simple substitution,

$$\rho = \text{Lim}\,\frac{\Delta s}{\Delta \omega} = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Et le problème que nous nous étions proposé (nos 22 et 22bis) se trouve ainsi complétement résolu.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.




BIBLIOTECA